用图像分析方法解读定积分中比值定理与估值定理的应用错误

李颖颖

（武汉职业技术学院 机电工程学院，湖北 武汉 430074）

摘 要：针对定积分性质中“比值定理”和“估值定理”的解题应用，指出了高等数学课程教学中常见的错误。从定积分的几何意义出发，结合图像分析其错误产生的原因，对教师养成严谨治学的态度、学生正确理解定积分的性质从而合理地解决数学应用问题等具有非常积极的作用。

关键词：定积分性质；比值定理；估值定理；图像分析

中图分类号：O172　　文献标识码：A　　文章编号：1671-931X（2013）04-0053-04

一、引言

高等数学的一元微积分中，关于定积分的性质中有两个俗称为“比值定理”和“估值定理”的概念。在本科及高职高专院校高等数学课程的教学过程中，经常会遇到这种情况，即在解题过程中如果机械地按论述条件得出了符合该论述结果的不等式，但往往会发现其所得出的不等式结果与事实存在歧义。这种情况常使学生感到困惑不解，有时甚至也会让一些授课老师感到沮丧和无奈。这种沮丧和无奈不但来源于该课程学生作业中高企的错误率上，而且也来自于众多规划教材中屡见不鲜的错误解答上。由于学生经常会拿各种版本教材中有关“比值定理”和“估值定理”例题中的错误解答与老师争论，尽管从表象看或许会认为这并不是很严重的错误，但在各个教材中都照抄照搬地出现，不仅会严重地干扰和误导着众多学习者对“比值定理”和“估值定理”的理解，同时也反应出编撰教材的师者治学不严谨的现实。因此，笔者认为，有必要去澄清对“比值定理”和“估值定理”的误解，还它一个真实的面目。

二、“比值定理”和“估值定理”解题应用时出错的案例

（一）比值定理解题应用的案例

比值定理的内容为：如果在区间[a，b]上 $f(x)$、$g(x)$ 可积，$f(x)\leqslant g(x)$，且 $a<b$，那么：$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$；该性质用于不通过计算，比较两定积分的大小[1]。在实际应用时，有些教材由于对该定理涵义理解的不全面常可见到其中错误的解答。举例如下：

1.某《应用高等数学》教材[2]的 102 页中有这样的解题应用。“例 1 比较定积分 $\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx$ 与 $\int_0^1 x^3dx$ 的大小。解：根据幂函数的性质，在上[0，1]，有 $\sqrt[3]{x}$

收稿日期：2013-06-14

作者简介：李颖颖（1955-）男，汉族，四川人，武汉职业技术学院机电工程学院副教授，研究方向：高等数学教学与研究。

$\geq x^3$。所以由性质 5(比值定理)得 $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx \geq \int_0^1 x^3 dx$”。

2.某《高等数学》教材[4]的 161 页中有：“例 1 比较定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ 的大小。解：因为 $|\sin x| \leq 1$，所以 $\sin^{10}x \leq \sin^2 x$。由定积分的比较性质，得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$”。

(二)估值定理解题应用的案例

估值定理的内容为：若 f(x)在[a,b]上连续，设 M 和 m 分别是 f(x)在区间[a,b]上的最大值和最小值，且 a<b，则有：$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$。该性质用于估计定积分值的范围[1]。对此，也在某些教材中有解题应用上的错误，如：

1.某《高等数学》教材[3]的 118 页中有：“例 4.32 估计定积分 $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$ 的值。解：先求 e^{-x^2} 在闭区间[-1,1]上的最小值和最大值。对 $f(x)=e^{-x^2}$ 求一阶导数，有 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$，再令 $f'(x)=0$，得到驻点 x=0。而 f(0)=1，$f(-1)=f(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$，所以最大值 M=1，最小值 $m=\frac{1}{e}$，则 $\frac{2}{e} \leq \int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx \leq 2$”。

2.某《高等数学》教材[5]的 128 页中有：“例 1 估计定积分 $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x}dx$ 的值的范围。解：令 $f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x}$，$x\in[0,\pi]$，因 $0\leq \sin^3 x \leq 1$，故 $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3+\sin^3 x} \leq \frac{1}{3}$，将此不等式在[0,π]上积分，得 $\int_0^{\pi} \frac{1}{4}dx \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x}dx \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{3}dx$ 即 $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x}dx \leq \frac{\pi}{3}$”。

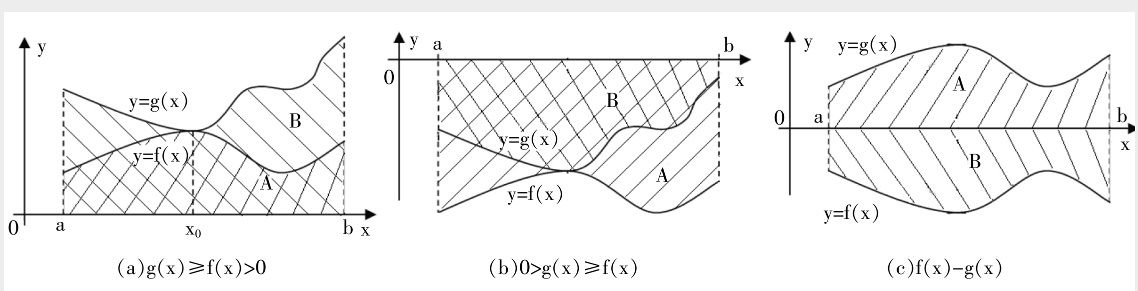
如果简单机械地照搬比值定理和估值定理的不等式结论，上述几个案例应用的解答所得出的答案似乎应该都是正确无误的。但事实上，上述几个案例的答案却都是错误的。那么，上述四个例题中依据比值定理和估值定理得出的答案究竟错在了什么地方？其错误解读的原因在哪里呢？笔者认为，有必要从定积分的几何意义出发，用图像解读分析的方法对比值定理和估值定理的涵义作深层次的解读。

三、比值定理(估值定理)的图像解读

在几何意义上，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的大小等于由曲线 y=f(x)，直线 x=a，x=b 以及 x 轴所围成的曲边梯形面积的代数和，当 f(x)>0 时，$\int_a^b f(x)dx$ 等于其对应的曲边梯形面积的值；当 f(x)<0 时，$\int_a^b f(x)dx$ 等于其对应的曲边梯形面积的负值。由此，我们可以从几何图像上对比值定理进行分析。

1.设在区间上[a,b]，函数 g(x)≥f(x)>0，则其函数图像如图 1(a)所示。由图可见，整个区间[a,b]上，两个函数只有在 x_0 点处的函数值是相等的，即 $f(x_0)=g(x_0)$，而在区间[a,b]的其他部分则总有 f(x)<g(x)。由定积分的几何意义可知，在区间[a,b]上，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所对应的是面积 A(右斜线阴影区)，而定积分 $\int_a^b g(x)dx$ 所对应的是面积 B(左斜线阴影区)，由此可知，在此可积区间内，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所对应的面积 A 恒小于定积分 $\int_a^b g(x)dx$ 所对应的面积 B。

2.如图 1(b)所示，若在区间[a,b]上，函数为 0>g(x)≥f(x)的关系，尽管定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所对应



(a)g(x)≥f(x)>0　(b)0>g(x)≥f(x)　(c)f(x)-g(x)

图 1 函数关系的几何图像解读

的面积A大于定积分$\int_a^b g(x)dx$所对应的面积B，但根据定积分的几何意义，$\int_a^b f(x)dx=-A$，$\int_a^b g(x)dx=-B$因此，依然保持着$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$的比值关系。

3.如图1(c)所示，若在区间[a，b]上，函数f(x)=-g(x)，且g(x)≥0，则f(x)≤0，同样有g(x)≥f(x)的关系。此时，该两函数在几何图像上为关于X轴镜像的关系，尽管定积分$\int_a^b f(x)dx$所对应的面积A等于定积分$\int_a^b g(x)dx$所对应的面积B，但根据定积分的几何意义，$\int_a^b f(x)dx=-B$，$\int_a^b g(x)dx=B$，故$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$的比值关系依然成立。

根据以上几何图像的解读分析可知，比值定理只有在函数f(x)≡g(x)(即两函数在此区间内图像完全重合)的特例情况下才有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$的结果出现。若在区间[a，b]上仅某点处存在f(x)=g(x)，其余各处均呈f(x)<g(x)的关系，对于定积分而言，就只能有$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$的结果，而得不出$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$的结果。

由此，亦可推广到估值定理的应用情况。亦即，设M和m分别是函数f(x)在区间[a，b]上的最大值和最小值，只要在区间[a，b]上存在某部分区间能够使m<f(x)<M成立，就只能有$m(b-a)<\int_a^b f(x)dx<M(b-a)$的结果，而得不出$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$的结果。

四、比值定理(估值定理)解题常见错误的原因分析

从以上几何图像分析可知，比值定理和估值定理的不等式结论中，含有等号的形式只是在f(x)≡g(x)(比值定理)和m=f(x)=M(估值定理)的特殊情况下才成立。在一般情况下，对比值定理而言，如果在区间[a，b]上存在某部分区间能够使f(x)<g(x)成立，则只能有$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$成立；而对估值定理而言，如果在区间[a，b]上存在某部分区间能够使m<f(x)<M成立，则只能有$m(b-a)<\int_a^b f(x)dx<M(b-a)$成立。

因此，我们可以明确地知道前述几个解题应用案例的错误就在于其照搬照抄了比值定理和估值定理中含有等号的定积分不等式结论，而没有考虑定积分的值实际上是对应着某块曲边梯形面积大小，由此而错误地沿用了等号这种不应该出现的状况。函数的大小表明该面积曲边顶的高低，曲边顶的不同高低又决定着曲边梯形面积的不同大小，因此，在某区间上，数值大的函数可以与数值小的函数在区间的某部分区间或某些点处相等，但在该区间上，数值大的函数的定积分必定大于数值小的函数的定积分，而绝不会出现数值大的函数的定积分等于数值小的函数的定积分的情况。

五、结语

对于定积分性质中的比值定理和估值定理而言，其采用未定函数用含等号的不等式进行表述无可厚非，因为其可以包含特例情况。然而，一旦应用到既定函数中，绝不可脱离实际地生搬硬套，否则就会很容易出现事实与结论不相符的错误结果。只要结合其几何图像进行解读，就能够合理分析并得出与事实相一致的正确结论。正因为数学一直有着较强的逻辑性，师者保持严谨治学的态度就显得更为重要。

参考文献：

[1] 薛志纯.高等数学[M].北京：清华大学出版社，2008：173.

[2] 丁匡平.应用高等数学(第三版)上册[M].北京：国防工业出版社，2010：101.

[3] 赵红革，颜勇.高等数学[M].北京：北京交通大学出版社，2008：117.

[4] 李志林.高等数学(上)[M].西安：西北工业大学出版社，2009：159.

[5] 郑桂梅. 高等数学 [M]. 北京：国防科技大学出版社，2008：128.

[6] 曹瑞成，姜海勤.高等数学[M].北京：化学工业出版社，2008：113.

[7] 俎冠兴.高等数学[M].北京：化学工业出版社，2007：97.

[8] 唐月红，刘萍，王东红.高等数学(上册)[M].北京：科学出版社，2008：176.

[9] 钟谭卫.大学数学[M].北京：科学出版社，2003：126.

[责任编辑：詹华西]

Explanation of Errors in the Application of Ratio Theorem and Valuation Theorem in Definite Integration with Graph Analysis Method

LI Ying-ying
(School of Mechanical & Electrical Engineering,Wuhan Polytechnic, Wuhan 430074,China)

Abstract: The article points out the common errors in the teaching of the application of ratio theorem and valuation theorem in definite integration. It suggests the class begin with explanation of the geometric meaning of definite integral and causes of errors in application should be analyzed with graphs. The article concludes that the method is helpful for teachers to develop rigorous scholarship and for students to obtain the understanding of the nature of definite integral and to know how to solve the problem of mathematics applications.

Key words: definite integral; ratio theorem; valuation theorem; graph analysis

（上接第 52 页）

The Design for Teaching Loop Structure in C Programming Language Class in Higher Vocational Colleges

ZHANG Chuan-xue
(The Department of Teaching Affairs, Hubei Open University, Wuhan430074, China)

Abstract: Loop structure is an important and difficult part in the teaching of C programming language. It is also the bottleneck for students to develop ideas about programming. It is very difficult for beginners to acquire. Taking "For" loop structure for instance, the author puts forward teaching method focusing on loop process, arranging teaching content from the easy to the difficult and complicated, eliciting the knowledge methodically and abstracting the grammar which is applied to practice. It is proved that the method obtains satisfactory teaching effects.

Key words: C programming language; For Loop; teaching design